Prof. Annette Huber-Klawitter
Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Christoph Brackenhofer

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2024/25

Semi-algebraische Geometrie

Blatt 13

Abgabe: 31.01.2025 14:00 Uhr

Letztes Blatt!

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

Sei $U \subset R^n$ eine offene semi-algebraische Menge und $f\colon U \to R$ eine Nash-Funktion, die auf U keine Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass dann $1/f$ ebenfalls eine Nash-Funktion ist.

Beweisen Sie außerdem, dass jede semi-algebraische Funktion $f\colon R^m \to R$ stückweise Nash ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**

Sei $P(X,Y) = X^3 - X^2 - Y^2$ und $A = V(P) \subset R^2$ (vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 1.) Bestimmen Sie alle Punkte von A, in denen die Bedingung für eine Nash-Untermannigfaltigkeit erfüllt ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**

Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $R_{>0} \to R_{>0}, x \mapsto \sqrt{x}$ stetig differenzierbar ist,

(i) indem Sie die Bedingung von Hand nachrechnen.

(ii) indem Sie den Satz über Inverse Funktionen verwenden.

(iii) indem Sie den Satz über Implizite Funktionen anwenden.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

Sei $M \subset R^n$ eine semi-algebraisch zusammenhängende Nash-Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to R$ eine Nash-Funktion. Sei U eine nichtleere offene Teilmenge von M auf der f verschwindet.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge S der Punkte von M, in denen der Funktionenkeim von f Null ist, eine offene Teilmenge von M ist.

(ii) Verwenden Sie Theorem 6.15 der Vorlesung um zu zeigen, dass S auch abgeschlossen ist.

(iii) Schließen Sie, dass f auf M die Nullfunktion ist.

(iv) Sei $g\colon M \to R$ nicht die Nullfunktion. Dann ist $\dim(g^{-1}(0)) < \dim(M)$.

Aufgabe 5 (4 Punkt)**.**

Sei $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{\infty}_{R^n,0}$. Eine *Derivation* ist eine R-lineare Abbildung $\partial : \mathcal{O} \to R$, welche die Leibnizregel erfüllt. Sei T der Vektorraum der Derivationen. Er heißt auch *Tangentialraum.* Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{O}$ besitzt das maximale Ideal $m = \{f \in \mathcal{O} \mid f(0) = 0\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{O} \setminus m$ und schließen Sie, das m das einzige maximale Ideal ist, d.h. $\mathcal{O}$ ist ein *lokaler Ring.*

(ii) Für $i = 1, \ldots, n$ liegt $\partial/\partial X_i$ in T und diese Elemente sind linear unabhängig.

(iii) Die Paarung $T \times m/m^2 \to R$ (definiert durch Anwenden der Derivation) ist wohldefiniert und definiert einen Isomorphismus $T \to (m/m^2)^*$.

Es gilt sogar $\dim T = n$ (Bonusaufgabe!), hierfür können Sie Theorem 6.15 benutzen.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach 47 im dritten Stock des mathematischen Instituts.